2. A SZILÁRDSÁGTAN ÉS A RUGALMASSÁGTAN ALAPJAI

A fejezet röviden összefoglalja a szilárdságtan és a rugalmasságtan alapvető fogalmait, melyek a végeselem módszer felépítéséhez és alkalmazásához nélkülözhetetlenek. A szilárdságtan és a rugalmasságtan alapjainak részletes feldolgozását a [10] tankönyvben is megtalálhatja az érdeklődő.

2.1. Alapfogalmak

A mérnöki / műszaki mechanikában a továbbiakban testnek nevezzük a gépelemeket gépalkatrészeket, szerkezeti elemeket.

Testmodell: olyan idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos testnek a vizsgálat szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi. A test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat elhanyagoljuk.

Szilárdságtan: a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

Terhelés: az általunk vizsgált rendszerhez nem tartozó testektől származó ismert nagyságú hatások, amelyek szilárd halmazállapotú testeknél általában felületi érintkezéssel valósulnak meg.

Tartós nyugalom dinamikai feltétele: a testre ható erőrendszer legyen egyensúlyi.

Tartós nyugalom kinematikai feltétele: a test megtámasztása ne engedjen meg merevtestszerű elmozdulásokat.

Egyensúlyi erőrendszer: az az erőrendszer, amely zérus nyomatéki vektorteret hoz létre.

Az egyensúly leggyakrabban használt feltétele:

$$\vec{F} = \vec{0}, \qquad \vec{M}_A = \vec{0},$$

ahol $\vec{F}$ az erőrendszer eredő erővektora és $\vec{M}_A$ az erőrendszer egy tetszőleges A pontra számított eredő nyomatékvektora. Az A pont a test (vagy tér) tetszőleges pontja.

Merev test: bármely két pontjának távolsága állandó. A test pontjainak távolsága terhelés hatására sem változik meg.

Szilárd test: alakváltozásra képes test. A test pontjainak távolsága terhelés hatására megváltozhat.

Alakváltozás: a terhelés hatására a test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és ezért a test anyagi geometriai alakzatai (hossz, szög, felület, térfogat) megváltoznak.

Kinematika a szilárdságtanban: leírja a (terhelés hatására) bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat.

Dinamika a szilárdságtanban: leírja a terhelés hatására a testben fellépő belső erőrendszert.

Anyagszerkezeti viselkedés: megadja az alakváltozás és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

Rugalmas alakváltozás: a terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (levétele) után visszanyeri eredeti alakját.

Lineárisan rugalmas alakváltozás: az alakváltozás és a belső erőrendszer között lineáris függvénykapcsolat van.

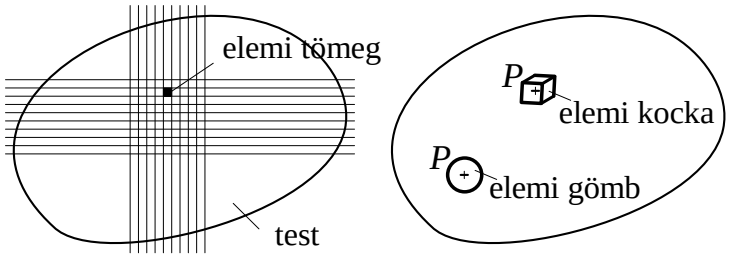
Nem lineárisan rugalmas alakváltozás: az alakváltozás és a belső erőrendszer közötti kapcsolat nem lineáris.

Képlékeny alakváltozás: a test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

Kis elmozdulás: a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző méreteinél.

Kis alakváltozás: a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek mint egy. $\varepsilon << 1, \quad \gamma << 1.$

Elemi környezet, elemi tömeg: Minden test végtelen sok tömegpontból felépülő rendszernek is tekinthető. A tömegponthoz úgy jutunk, hogy a testet gondolatban végtelen sok kis részre bontjuk.



Tömegpont: a szilárdságtanban egy olyan kis testrész, amelynek méretei a test méreteihez képest nagyon (elhanyagolhatóan) kicsik.

A szilárdságtanban a testet alkotó tömegpontokat elemi tömegeknek, vagy elemi környezeteknek nevezzük.
Az elemi környezetet elemi gömbbel, vagy elemi kockával szokás szemléltetni.
Az elemi környezet szilárdságtani állapotait az elemi környezet egy pontjához (a „középpontjához") kötött mennyiségekkel írjuk le.

Ponthoz kötött mennyiségek:
- skalár (például tömegsűrűség, alakváltozási energia),
- vektor (például elmozdulás, szögelfordulás),
- tenzor (például alakváltozási, feszültségi).

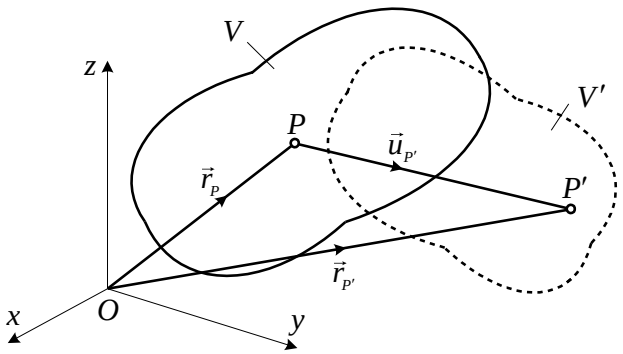
Elemi környezet szilárdságtani állapotai:
- elmozdulási,
- alakváltozási,
- feszültségi,
- energetikai.

A test szilárdságtani állapotai: az elemi környezetek szilárdságtani állapotainak összessége.
A test szilárdságtani állapotait mezőkkel (terekkel) tudjuk leírni. A mezők megadják a vizsgált mennyiség helytől való függését.

Ezek a mezők lehetnek:
- skalármezők (pl. tömeg, hőmérséklet, energia, stb.),
- vektormezők (elmozdulás, sebesség, erő, stb.),
- tenzormezők (feszültségek, alakváltozások, stb.).

2.2. Szilárdságtani állapotok

2.2.1. Elmozdulási állapot



Az ábrán folytonos vonallal rajzolt test a terhelés hatására a szaggatott vonallal jelölt helyzetbe kerül. Közben a test P pontja P' helyre mozdul el.

A P pont elmozdulási állapota:

$$\vec{u}_P = u_P\vec{e}_x + v_P\vec{e}_y + w_P\vec{e}_z.$$

A test elmozdulási állapota (a test valamennyi P pontjának elmozdulása):

$$\vec{u}(\vec{r}) = u(\vec{r})\vec{e}_x + v(\vec{r})\vec{e}_y + w(\vec{r})\vec{e}_z.$$

Itt $u(\vec{r}) = u(x,y,z)$, $v(\vec{r}) = v(x,y,z)$ és $w(\vec{r}) = w(x,y,z)$ az elmozdulásmező skaláris koordinátái. A továbbiakban feltételezzük, hogy az általunk vizsgált testek csak kis alakváltozást szenvednek.

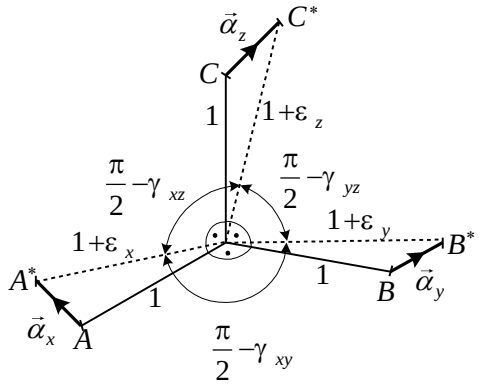
2.2.2. Alakváltozási állapot

Elemi triéder: a P pontban felvett, terhelés előtt egymásra kölcsönösen merőleges $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektor hármas.

Az elemi környezet alakváltozása: a terhelés hatására az elemi triéder végpontjainak a merevtestszerű forgáson kívüli mozgása a P ponthoz képest.

$$PABC \quad \mapsto \quad PA^*B^*C.$$

Merevtestszerű forgás:
A test P pontja rögzített, nem mozdul el.
A test többi pontja a P pont körül végez forgó mozgást.



A megváltozott hosszak: $\overline{PA^*} = 1+\varepsilon_x$, $\overline{PB^*} = 1+\varepsilon_y$, $\overline{PC^*} = 1+\varepsilon_z$.

A megváltozott szögek: $\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}$, $\frac{\pi}{2}-\gamma_{yz}$, $\frac{\pi}{2}-\gamma_{xz}$.

A szögek értelmezéséből következik, hogy $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}, \gamma_{yz}=\gamma_{zy}, \gamma_{xz}=\gamma_{zx}$.

Alakváltozási jellemzők: - fajlagos nyúlások: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$,
- fajlagos szögtorzulások: $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

A fajlagos nyúlások mértékegysége 1 , a fajlagos szögtorzulásokat radiánban mérjük.
$\varepsilon > 0$ esetén az egységnyi hossz megnyúlik,
$\varepsilon < 0$ esetén az egységnyi hossz megrövidül.

$\gamma > 0$ esetén az eredetileg $\frac{\pi}{2}$ szög nagysága csökken.

$\gamma < 0$ esetén az eredetileg $\frac{\pi}{2}$ szög nagysága növekszik.

Kis alakváltozás: ha $\varepsilon \approx 10^{-3} - 10^{-5}$, $\gamma \approx 10^{-3} - 10^{-5}$.

Az alakváltozási tenzor

A P pont elemi környezetének alakváltozási állapotát az alakváltozási tenzor jellemzi egyértelműen.
- Diadikus előállítás: $\underline{\underline{A}} = \vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z$.

- Mátrixos előállítás: $\left[\underline{\underline{A}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$.

Az alakváltozási vektor koordinátái:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\vec{e}_z,$$

$$\vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

Az alakváltozási tenzor mátrixának első oszlopában az $\vec{\alpha}_x$ alakváltozási vektor, második oszlopában az $\vec{\alpha}_y$ alakváltozási vektor és harmadik oszlopában az $\vec{\alpha}_z$ alakváltozási vektor koordinátái állnak.

Az alakváltozási tenzor ismeretében meghatározhatunk tetszőleges irányokhoz tartozó alakváltozási jellemzőket.

Legyen $\vec{n}$ és $\vec{m}$ két, egymásra merőleges egységvektor: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = 0.$

Az $\vec{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektor: $\vec{\alpha}_n = \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n},$

Az $\vec{n}$ irányhoz tartozó fajlagos nyúlás: $\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \vec{\alpha}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n},$

Az $\vec{n}$ és $\vec{m}$ irányokhoz tartozó fajlagos szögtorzulás: $\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \underbrace{\vec{m} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{m}}_{\text{mert } \underline{\underline{A}}_P \text{ szimmetrikus}}$.

2.2.3. Feszültségi állapot

Feszültségvektor: A test adott metszetfelületén (belső felületén) megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora (intenzitásvektora).

Jelölése: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{r}, \vec{n})$, ahol $\vec{r}$ a pont helyvektora és $\vec{n}$ a metszetfelület pontbeli normális egységvektora.

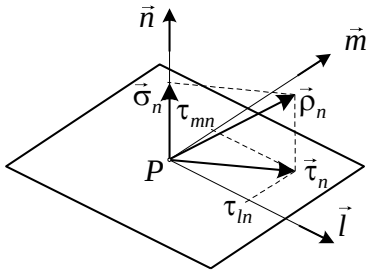
Ha P rögzített pont, akkor $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n$ és $\vec{\rho}_{(-\vec{n})} = -\vec{\rho}_{n.}$

Az ábrán a feszültségvektor összetevői és koordinátái láthatóak.

$\vec{n}$ jelöli az elemi felület normális egységvektorát, $\vec{m}$ és $\vec{l}$ pedig az elemi felület síkjába eső egységvektorok.

E három vektor mindegyike egységnyi hosszú: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = |\vec{l}| = 1$,

valamint egymásra merőlegesek $\vec{n} \cdot \vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{l} = \vec{n} \cdot \vec{l} = 0$.



A feszültségvektor összetevői (vektor mennyiségek):

$$\vec{\sigma}_n = \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{\rho}_n)}_{\sigma_n}\vec{n}, \quad \vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{\rho}_n) \times \vec{n},$$

ahol $\vec{\sigma}_n$ a normálfeszültség vektor, $\vec{\tau}_n$ pedig a csúsztatófeszültség vektor.

A feszültségvektor koordinátái (skalár mennyiségek):

- normálfeszültség koordináta: $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{\rho}_n \cdot \vec{n},$
- csúsztató feszültség koordináták: $\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n,$

$$\tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n.$$

Mértékegység: az SI[1] rendszerben N/m^2 (Newton[2] per négyzetméter) = Pa (Pascal[3])

a mérnöki gyakorlatban N/mm^2 =MPa , (megapaszkál).

A test egy adott pontjában a $\vec{\rho}$ feszültségvektor az $\vec{n}$ lineáris, homogén függvénye:

$$\vec{\rho}(\vec{n}) = \vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n}.$$

A feszültségi tenzor:

A P pont elemi környezetének feszültségi állapotát az $\underline{\underline{F}}_P$ feszültségi tenzor egyértelműen jellemzi (megadja).

A feszültségi tenzor diadikus előállítása: $\underline{\underline{F}} = \vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z.$

A feszültségi tenzor mátrixos előállítása: $\left[\underline{\underline{F}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$

Az x, y, z normálisú síkon ébredő feszültségvektorok koordinátái:

---

[1] Système International d'Unités / Mennyiségek nemzetközi rnedszere
[2] Isaac Newton (1642-1727) angol fizikus, matematikus, csillagász és filozófus.
[3] Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus és fizikus.

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y + \tau_{zx}\vec{e}_z,$$
$$\vec{\rho}_y = \tau_{xy}\vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z,$$
$$\vec{\rho}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

Előírt irányokhoz tartozó feszültség-koordináták kiszámításához legyen $\vec{m}$ valamint $\vec{n}$ két, egymásra merőleges egységvektor: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$ és $\vec{n}\cdot\vec{m} = 0.$

$$\vec{\rho}_n = \underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n},$$
$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n},$$
$$\tau_{nm} = \vec{m}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{m}\cdot\underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{n} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{F}}_P \cdot \vec{m}.$$

Feszültségi főtengelyek, főfeszültségek

Ha egy $\vec{e}$ egységvektorra merőleges elemi felületen $\vec{\tau}_e = \vec{0}$ és ebből következően $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$,
akkor - az $\vec{e}$ irány (tengely) feszültségi főirány (főtengely),
- σ_e főfeszültség,
- az $\vec{e}$ - re merőleges elemi felület síkja pedig főfeszültségi sík.

Megjegyzés:
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, melyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.
- A σ_e főfeszültség értéke lehet nulla is. Ekkor $\vec{\rho}_e = \vec{0}$.

A feszültségi tenzor a főtengelyek koordináta-rendszerében: $\underset{123}{\left[\underline{\underline{F}}_P\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$

Megállapodás a főfeszültségek sorszámozására: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Főtengely feladat ≡ sajátérték feladat

A főirányok és főfeszültségek meghatározása matematikai szempontból egy sajátérték-feladat megoldása.

Kérdés: Létezik-e olyan $\vec{e}$ vektor, amellyel az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzort megszorozva az $\vec{e}$ vektorral párhuzamos vektort kapunk eredményül?

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$

$$\underline{\underline{F}}\cdot\vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{I}}\cdot\vec{e}, \text{ ahol } \left[\underline{\underline{I}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{az egység- vagy idemtenzor.}$$

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}\right)\cdot\vec{e} = \vec{0}.$$

Ez az egyenlet az $\vec{e}$ egységvektor koordinátáira nézve homogén lineáris algebrai egyenletrendszer.
A lineáris, homogén algebrai egyenletrendszer skaláris alakban:

$$(\sigma_x - \sigma_e)e_x + \tau_{xy}e_y + \tau_{xz}e_z = 0,$$
$$\tau_{yx}e_x + (\sigma_y - \sigma_e)e_y + \tau_{yz}e_z = 0,$$
$$\tau_{zx}e_x + \tau_{zy}e_y + (\sigma_z - \sigma_e)e_z = 0.$$

Válasz: létezik legalább három olyan irány, amely eleget tesz a főirányra az előbbiekben megadott feltételeknek.
Az egyenletrendszer nem triviális megoldása akkor létezik, ha a

$$\det\left|\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{I}}\right| = 0$$

egyenlet teljesül, azaz

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_e) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_e) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_e) \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve és az eredményt átrendezve kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\sigma_e^3 - F_I\sigma_e^2 + F_{II}\sigma_e - F_{III} = 0.$$

Ez harmadfokú algebrai egyenlet σ_e - re nézve. Megoldásai a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségek.

A karakterisztikus egyenlet együtthatói:

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

$$F_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

F_I, F_{II} és F_{III} a feszültségi tenzor skalár invariánsai.

Invariáns: értéke koordináta transzformáció során nem változik meg, koordináta rendszertől független mennyiség.

A karakterisztikus egyenletből kiszámított $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ főfeszültségeket az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve kapjuk az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ főirányokat.

2.2.4. Alakváltozási energia

- Fajlagos (egységnyi térfogatra vonatkozó) alakváltozási energia:

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right).$$

- Test alakváltozási energiája: $U = \int\limits_{(V)} u dV$. Itt a V a test térfogata.

Matematikai kitérő: tenzorok kétszeres skaláris szorzata:

Legyen ismert az $\underline{\underline{A}} = (\vec{a} \circ \vec{b})$ és $\underline{\underline{C}} = (\vec{c} \circ \vec{d})$ tenzor.

Kétszeres skaláris szorzat: $\underline{\underline{A}} \cdot\cdot \underline{\underline{C}} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot\cdot (\vec{c} \circ \vec{d})$

Az $\vec{a}$ -t szorzom skalárisan a $\vec{c}$ -vel és a $\vec{b}$ -t szorzom skalárisan a $\vec{d}$ -vel, majd az így kapott két skalár számot szorzom össze egymással.

- Az alakváltozási energia tenzorok kétszeres skaláris szorzatával:

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e} + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right) \cdot\cdot \left(\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\rho}_x \cdot \vec{\alpha}_x + \vec{\rho}_y \cdot \vec{\alpha}_y + \vec{\rho}_z \cdot \vec{\alpha}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right).$$

2.3. Rugalmasságtani egyenletek

Test szilárdságtani állapotának jellemzői:

- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ elmozdulási vektormező (három ismeretlen skalár mező),
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzormező (hat ismeretlen skalár mező),
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ feszültségi tenzormező (hat ismeretlen skalár mező),
- $u = u(x, y, z)$ fajlagos alakváltozási energia mező (egy ismeretlen skalár mező).

A továbbiakban azokat az általános összefüggéseket írjuk fel, melyek kapcsolatot teremtenek az előbb felsorolt állapotjellemzők között lineárisan rugalmas alakváltozások esetén. Ezek a rugalmasságtani egyenletek.

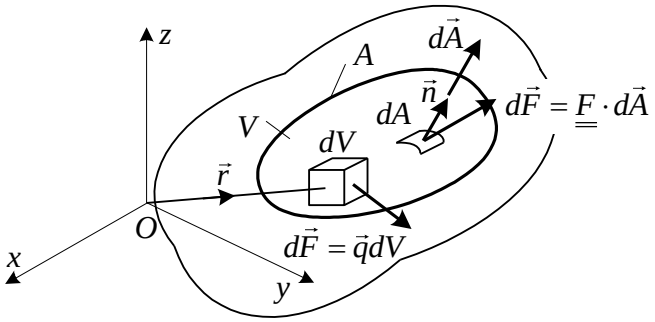
A rugalmasságtani feladat kitűzése:

Adott: - a test méretei és alakja,
- a test anyagának viselkedésére jellemző mennyiségek,
- a test terhelése és megtámasztása.

Keresett: - az $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ elmozdulási vektormező,

- az $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzormező,
- az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ feszültségi tenzormező és
- az $u = u(x, y, z)$ fajlagos alakváltozási energia (skalár) mező.

2.3.1. Egyensúlyi egyenletek



Ragadjunk ki a rugalmas test belsejéből egy olyan V térfogatot, amely teljesen a test belsejében van.
A V környezetének mechanikai hatásait erőkkel vesszük figyelembe:

- a V elemi térfogatára ható erő: $d\vec{F} = \vec{q}dV$, ahol $\vec{q}$ a térfogaton megoszló erőrendszer sűrűségvektora.
- a V elemi felületére ható erő: $d\vec{F} = \vec{\rho}dA = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA$, ahol $\vec{\rho} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}$ a felületen megoszló ER sűrűsége.

A V testrész egyensúlyban van: $\vec{F} = \vec{0} = \int\limits_{(V)} \vec{q}dV + \int\limits_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \overset{d\vec{A}}{\vec{n}dA}$.

A *Gauss*[4] (gausz)-*Osztrogradszkij*[5]-féle integrál-átalakítási tétel szerint:

$$\int\limits_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}dA = \int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV ,$$

ahol ∇ a *Hamilton*[6]-féle differenciál operátor. A tétel nemcsak $\cdot$ skaláris szorzás, hanem $\times$ vektoriális és $\circ$ diadikus szorzás esetén is érvényes.

Ezt felhasználva: $$\vec{0} = \int\limits_{(V)} \vec{q}\, dV + \int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV.$$

Átrendezve: $$\int\limits_{(V)} \left(\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla\right) dV = \vec{0} .$$

Az integrál bármely V térfogat választása esetén nulla, ez pedig csak akkor lehetséges, ha az integrandusz nulla.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} .$$

Ezt az összefüggést (vektoregyenletet) nevezzük egyensúlyi egyenletnek.
Az egyensúlyi egyenletek skaláris alakja DDKR-ben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

---

[4] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) német matematikus.
[5] Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801-1862) orosz matematikus.
[6] William Rowan Hamilton (1805-1865) ír fizikus és matematikus.

Elvégezve a szorzásokat az egyensúlyi egyenletek skaláris alakja *descartesi*[7] KR-ben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+q_x=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+q_y=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+q_z=0.$$

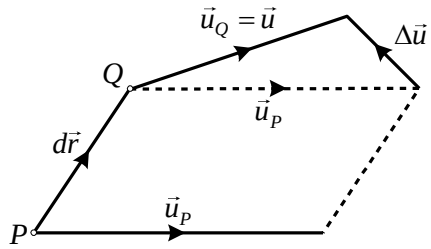
Az egyensúlyi egyenletek a térfogati terhelés és a feszültségi állapot közötti összefüggést adják meg.

2.3.2. Kinematikai egyenletek

Ez a pont a kinematikai egyenletek kis alakváltozások esetén érvényes alakját vezeti le.

A kinematikai egyenletek (geometriai egyenletek, kompatibilitási egyenletek) adják meg az elmozdulásmező és alakváltozási mező közötti kapcsolatot.

Az alakváltozási mező koordinátái nem függetlenek egymástól: az elmozdulásmező koordinátáiból származtathatók megadott szabályok szerint.



Vizsgáljuk meg az ábrán P-vel jelölt pont elemi környeztében lévő Q pont elmozdulását:

$$d\vec{r}=dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y+dz\vec{e}_z,$$

$$\vec{u}=\vec{u}\left(x,y,z\right)=u(x,y,z)\vec{e}_x+v(x,y,z)\vec{e}_y+w(x,y,z)\vec{e}_z.$$

Az elmozdulásmező hely szerinti megváltozása:

$$\Delta\vec{u}=\vec{u}_Q-\vec{u}_P=\vec{u}-\vec{u}_P.$$

Fejezzük ki az előző egyenletből $\vec{u}$-t, majd a jobb oldalt fejtsük *Taylor*[8]-sorba:

$$\vec{u}=\vec{u}_P+\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right|_P dx+\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\right|_P dy+\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\right|_P dz+\underbrace{\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\right)}_{\text{magasabb rendű tagok}}.$$

Az elmozdulásmező hely szerinti megváltozása lineáris közelítés esetén:

$$\Delta\vec{u}\approx d\vec{u}=\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right|_P \underset{\vec{e}_x\cdot d\vec{r}}{dx}+\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\right|_P \underset{\vec{e}_y\cdot d\vec{r}}{dy}+\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\right|_P \underset{\vec{e}_z\cdot d\vec{r}}{dz}.$$

A jobb oldalon álló tagokból kiemelve $\vec{r}$-t:

$$d\vec{u}=\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\circ\vec{e}_x+\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\circ\vec{e}_y+\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\circ\vec{e}_z\right)}_{\underline{\underline{D}}\ -\text{ az elmozdulásmező derivált tenzora}}\cdot d\vec{r}=\underline{\underline{D}}\cdot d\vec{r},$$

Az elmozdulásmező derivált tenzora:

$$\underline{\underline{D}}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\circ\vec{e}_x+\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\circ\vec{e}_y+\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\circ\vec{e}_z=\vec{u}\circ\nabla.$$

A derivált tenzor felbontása szimmetrikus és ferde szimmetrikus részre:

$$\underline{\underline{D}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}+\underline{\underline{D}}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}-\underline{\underline{D}}^T\right)=\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{\Psi}}.$$

---

[7] René Descartes / Renatus Cartesius (1596-1650) francia filozófus, matematikus és természettudós.
[8] Brook Taylor (1685-1731) angol matematikus.

A szimmetrikus rész a $\underline{\underline{A}}$ az alakváltozási tenzor, mely az elemi környezet alakváltozására jellemző. A ferde szimmetrikus rész a $\underline{\underline{\Psi}}$ forgató tenzor, amely az elemi környezet merevtestszerű szögelfordulását jellemzi.

Az alakváltozási tenzor előállítására szolgáló

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$$

összefüggést *kinematikai (vagy geometriai) egyenletnek* nevezzük. A kinematikai egyenlet ebben a formájában csak kis alakváltozások esetén érvényes.

A kinematikai tenzoregyenletnek megfelelő skalár egyenletek:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

A kinematikai egyenletek az elmozdulásmező és az alakváltozási mező koordinátái között teremtenek kapcsolatot.

2.3.3. Anyagegyenletek - általános Hooke-törvény

a) *Általános Hooke-törvény izotróp anyagokra*

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független.
Izotróp anyagokra az általános *Hooke*[9] (huk) törvény két lehetséges alakja:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}}\right), \qquad \underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}}\right).$$

A fenti egyenletekben a G csúsztató rugalmassági modulus és a ν *Poisson*[10]-tényező anyagjellemzők, $\underline{\underline{E}}$ az egységtenzor, F_I a feszültségi tenzor első skalár invariánsa, A_I pedig az alakváltozási tenzor első skalár invariánsa: $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Az $\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{E}}\right)$ tenzoregyenlet az alábbi skalár egyenleteket tartalmazza:

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right],$$

$$\sigma_y = 2G\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right],$$

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right],$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}.$$

Az $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu} F_I \underline{\underline{E}}\right)$ tenzoregyenlet az alábbi skalár egyenleteket tartalmazza:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

---

[9] Robert Hooke (1635-1703) angol természettudós.
[10] Siméon Denis Poisson (1781-1840) francia matematikus és fizikus.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

A $2G = \dfrac{E}{1+\nu}$ összefüggés felhasználásával az előbbi egyenletrendszer első három egyenlete átrendezhető:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z .$$

Hasonló gondolatmenettel: $\varepsilon_y = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_x + \dfrac{1}{E}\sigma_y - \dfrac{\nu}{E}\sigma_z,$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z.$$

Itt E a *Young*[11]-féle modulus (anyagjellemző).

Ezt felhasználva az izotóp anyagra vonatkozó Hooke-törvény mátrix alakban is felírható:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix},$$

vagy tömören $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}},$

ahol $\underline{\underline{\varepsilon}}$ az alakváltozási jellemzők oszlopmátrixa (oszlopvektora),

$\underline{\underline{\sigma}}$ a feszültségek oszlopmátrixa (oszlopvektora),

$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ az anyagjellemzők mátrixa.

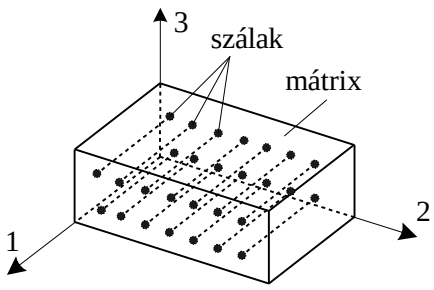
b) *Általános Hooke törvény ortotróp anyagokra*

Ortotrópia: az anizotrópia (iránytól függő anyagi viselkedés) olyan speciális esete, amikor az anyag viselkedése egymásra merőleges irányokban vett anyagjellemzőkkel leírható.

Ez az eset a műszaki gyakorlatban sokszor előfordul, például egyes szálerősített műanyagok (kompozit anyagok) esetén.

A kompozitok többféle, eltérő tulajdonságú anyagból összetett, összeépített anyagok. A kompozitok egy speciális fajtája a szálerősített műanyag. A szálerősített műanyagok általában jobb mechanikai tulajdonságokkal rendelkeznek, mint alkotórészeik.

Előnyük, hogy lényegesen kisebb önsúly esetén érhető el velük ugyanaz a szilárdság és merevség, mint a hagyományos (pl. acél) szerkezeti anyagoknál.



Az ábrán egyirányban futó szálakkal erősített anyag látható. A szálak anyaga lehet pl. grafit, aramid (kevlár), vagy üveg, míg a mátrix (az ágyazó anyag) polimer, kerámia, fém stb.

Valóság: a szálak és a mátrix anyaga eltérő tulajdonságú, ezért az anyag nem homogén.

Kompozit makroszkópikus mechanikai modellje: homogén, anizotróp anyag.

[11] Thomas Young (1773-1829) angol orvos, fizikus és polihisztor.

Az anyag az $1,2,3$ irányban különböző tulajdonságokat mutat. Az $1,2,3$ az anyag természetes (szálirányhoz illeszkedő) koordinátarendszere.

Az általános Hooke törvény ortotróp anyagra:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix},$$

vagy tömören $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\underline{\underline{\varepsilon}}.$

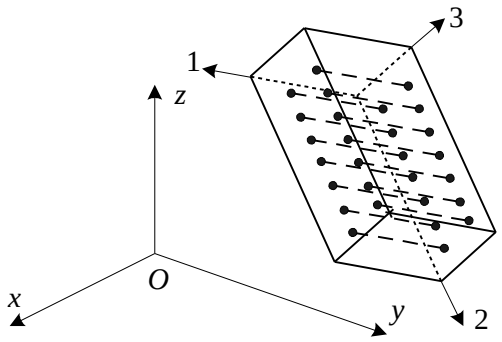
E_1, E_2, E_3 az $1,2,3$ irányhoz tartozó rugalmassági modulusok, G_{12}, G_{23}, G_{13} a csúsztató rugalmassági modulusok, ν_{12}, ν_{23}, ... a *Poisson* tényezők. Pl.: ν_{12} az 1 irányú húzáshoz tartozó 2 irányú nyúlást adja meg.

Mivel az U alakváltozási energia mindig pozitív mennyiség, ezért az anyagállandók $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ mátrixa szimmetrikus.

Ezért: $\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \qquad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}.$

A lineárisan rugalmas ortotróp anyag 9 független anyagállandóval jellemezhető: $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$.

Kérdés: hogyan írható fel az ortotróp anyagra vonatkozó *Hooke* törvény az x, y, z KR-ben?



Erre azért van szükség, mert sok esetben nem az anyag természetes koordinátarendszerében dolgozunk.

A feszültségeket és az alakváltozási jellemzőket transzformálnunk kell a megfelelő KR-be. Itt azonban nem a szokásos koordináta transzformációról van szó!

Vizsgáljuk meg a feszültségek transzformációját!

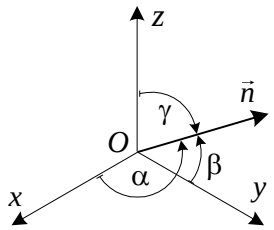
Pl.: a σ_n feszültségkoordináta kiszámítása az x, y, z KR-ben vett mennyiségekkel:

Az irány egységvektor az x,y,z koordináta-rendszerben:

$$\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z = \cos\alpha\vec{e}_x + \cos\beta\vec{e}_y + \cos\gamma\vec{e}_z.$$

$$|\vec{n}| = 1 = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}.$$

$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\vec{\rho}_n.$$



$$[\vec{\rho}_n] = [\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ \tau_{yx}n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz}n_z \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_z n_z \end{bmatrix}.$$

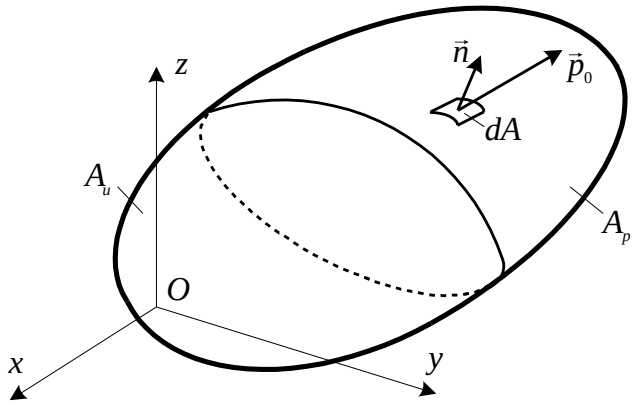
$$\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{\rho}_n = \sigma_x n_x^2 + \underline{\tau_{yx}n_y n_x} + \underline{\underline{\tau_{zx}n_z n_x}} + \underline{\tau_{xy}n_x n_y} + \sigma_y n_y^2 + \underline{\underline{\underline{\tau_{zy}n_z n_y}}} + \underline{\underline{\tau_{xz}n_x n_z}} + \underline{\underline{\underline{\tau_{yz}n_y n_z}}} + \sigma_z n_z^2.$$

Az azonos számú vonallal aláhúzott tagokat összevonva:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\left(\tau_{xy}n_x n_y + \tau_{yz}n_y n_z + \tau_{zx}n_z n_x\right).$$

A többi feszültségkoordinátára ugyanez a gondolatmenet érvényes.

2.3.4. Peremfeltételek



Az előzőekben felírt tizenöt egyenletből álló differenciál-, illetve algebrai egyenletrendszer egyértelmű megoldásához szükségünk van a peremfeltételek megadására is.

Kinematikai peremfeltételek: előírt (ismert) elmozdulás

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{(az } A_u \text{ felületen).}$$

Dinamikai peremfeltételek: előírt (ismert) felületi terhelés

$$\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n} = \vec{p}_0 \ \text{(az } A_p \text{ felületen).}$$

Az eddigieket *összefoglalva* a rugalmasságtan egyenletrendszere és peremfeltételei:

- $\underline{\underline{F}}\cdot\nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenlet (3 db skalár egyenlet),
- $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}\circ\nabla + \nabla\circ\vec{u}\right)$ kinematikai egyenlet (6 db skalár egyenlet),
- $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu}{1+\nu}F_I\underline{\underline{E}}\right)$ anyagegyenlet (6 db skalár egyenlet),
- $\vec{u}\big|_{A_u} = \vec{u}_0$ kinematikai peremfeltétel (3 db skalár egyenlet),

- $\left.\left(\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}\right)\right|_{A_p} = \vec{p}_0$ dinamikai peremfeltétel (3 db skalár egyenlet).

Bizonyítható, hogy a rugalmasságtan egyenletrendszerének adott peremfeltételek mellett egy és csak egy megoldása létezik (egzisztencia és unicitás).

Egzakt megoldás: ha a keresett mezők a rugalmasságtan egyenletrendszerének minden egyenletét kielégítik.

Közelítő megoldás: amikor a keresett mezők nem elégítik ki a rugalmasságtan egyenletrendszerének minden egyenletét.

A keresett mezők:
- $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ elmozdulási vektormező,
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzormező,
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ feszültségi tenzormező.

A fenti egyenletrendszer egzakt megoldásának előállítása a mérnöki problémák túlnyomó többségénél nem lehetséges. Ezért a mérnöki feladatoknál leggyakrabban közelítő megoldások előállításával is megelégszünk.

2.3.5. Kompatibilitási egyenletek

A *Saint-Venant* (sanvenan)-féle kompatibilitási egyenlet:

Szorozzuk be a

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}\circ\nabla + \nabla\circ\vec{u}\right)$$

alakban felírt kompatibilitási egyenlet mindkét oldalát jobbról és balról vektoriálisan ∇-val. Ekkor kapjuk a *Saint-Venant*[12]-féle kompatibilitási egyenletet:

$$\nabla\times\underline{\underline{A}}\times\nabla = \underline{\underline{0}}.$$

A *Saint-Venant*-féle kompatibilitási feltétel egyenletei DDKR-ben:

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2},$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right),$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right),$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

[12] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) francia fizikus.